機械力学 I　Applied Dynamics I

（クラス 2A・火 2 時限担当：助教　張斌，zhangbin@kanagawa-u.ac.jp）

到達目標

本講義の到達目標は、受講生が、一自由度振動系を対象に、①運動方程式を作成すること、②運動方程式の解を求めること、③振動を語る上に不可欠な用語（固有振動数、共振など）を理解すること、などを通じて、(a)自由応答波形を想像しその特徴を語る能力、(b)強制応答波形を想像しその周波数応答特性を語る能力、(c)エンジニアとして習得すべき低振動化（共振回避）、を身につけられること、である。

また、工学部機械工学科のカリキュラム・ポリシーに従い，材料・熱・流体・振動・制御・設計・加工等の機械工学の根幹についての専攻科目を配置し、体系的知識や手法によって機械やシステムを解析し設計・製作する実践的能力を育成する。本講義では「振動」についての基礎的かつ重要な捉え方を学習し，その発展科目である「機械力学 II」の先に履修しておくことが望ましい。

授業内容

この講義では、配布資料（書き込み形式）と使用書二冊を用いて、一自由度振動系を対象に、振動という現象をどのように捉え、どのようなことに注目すべきか、数学と力学を利用して考えていく。はじめに、この講義で用いる数学と力学についての基礎事項を整理，復習する．次いで，身近な振動現象をイメージしながら、どのように現象を捉え，理解するかを講釈していく．

理解を深めるために，マークシート式の確認テストやレポートを基本的に隔週で行う．

また毎回の講義の最初の５分は前回の復習として、受講生は「前回に何を学んだかを一言でまとめること、自分としてのポイントは何であったか」を各自で振り返える。

授業計画

各回の講義および演習内容は、以下のように予定しているが、時間の関係で若干前後する場合もある．配布資料（書き込み形式）と使用書を読んだ上で出席していることを前提に講義するため，予習として，①各回の該当頁を予め読んでくること，②分からない用語や数式展開のところに鉛筆で下線を引いてくること，の２点が不可欠である．

また，復習としては，予習②で下線を付した点について講義時に示した説明をもう一度自分で考え納得できるかを確認してみること，使用書の該当部分を再度読んでおくこと，を勧める．なお，毎回の講義の最初の５分間で，各自で再度，配布資料中の前回分について復習をしてもらう．

なお，予習・復習合わせて各回あたり約４時間の自己学習を想定しているが，予習については開講前の休暇中やGWなどを利用して複数回分をまとめて行っても良い（早めに全体像がつかめるため，かえって効果的である）．　　　　＊() 内は配布資料の章番号を表す．

【1】ガイダンス／全体像と準備（第０章）

【小テスト①：身近な振動現象について授業時間内にレポートを記載してもらう】

【2】本講義に必要な数学・力学の整理～基本事項～（第１章）

【予習：使用書１　8·1·1～8·1·3】

【3】本講義に必要な数学・力学の整理～運動方程式の作成～（第２章）

【予習：使用書１　8·1·4】【小テスト②：第２回の内容：数学と力学の基礎】

【4】本講義に必要な数学・力学の整理～運動方程式の解法～（第２章）

【予習：使用書１　8·1·4】

【5】一自由度系の自由振動～減衰のない振動～（第３章）

【予習：使用書１　8·2·1】【小テスト③：第３・４回の内容：運動方程式の作成と解法】

【6】一自由度系の自由振動～減衰のある振動～（第３章）

【7】中間テストおよび解説・質疑応答（第 6 回までの内容、50 分）

【8】一自由度系の強制振動～力による強制振動～（第４章）

【予習：使用書１　8·3·1】

【9】一自由度系の強制振動～変位による強制振動～（第４章）

【予習：使用書１　8·3·2】

【10】一自由度系の強制振動～振動の伝達と防振～（第４章）

【予習：使用書１　8·2·1】【小テスト④：第８・９回の内容：運動方程式の作成と解法】

【11】二自由度系の運動方程式（第５章）

【予習：参考資料　第４章)】

【12】運動方程式を作成するその他の方法（第６章）

【予習：参考資料　第９章】【小テスト⑤：第 11 回の内容：二自由度系の運動方程式の作成】

【13】並進振動系と回転振動系（第７章）

【予習：使用書１　第７章】【小テスト⑥：第 12 回の内容：ラグランジュ方程式】

【14】最終テスト（全ての内容、５０分））

授業運営

本講義は原則対面授業で行う。

授業運営の詳細については初回授業時間中に改めて説明するが，書き込み式の配布資料と使用書を利用して講義を行う。配布資料（書き込み式）および参考資料は以下のいずれかよりＰＤＦファイルを各自でダウンロードする．配布資料については，各自で印刷し、講義に持参すること。その配布資料と同じものをスクリーンに投影し、穴埋めをしながら講義を進める。

【配布資料・参考資料の入手法】 web class

予習として，①各回の該当頁（授業計画に記載のカッコ内）を予め読み，②分からない用語や数式展開のところに鉛筆で下線を引いてくること，を前提として講義を進める．また毎回の講義の最初の５分間で，各自で再度，配布資料中の前回分について復習をしてもらう．

評価方法

第７回に実施予定の中間テスト３０%，第１４回に実施予定の最終テスト７０%のトータル１００点満点で評価する.

オフィスアワー

火曜日の 14 時から 17 時までに，12 号館 24 号室（内線 3472）へ. また，メール（zhangbin@kanagawa-u.ac.jp）では随時受け付ける．なお，質問や指摘は講義中や講義後にも受け付ける.

使用書

景山一郎、矢口博之、山崎徹『基礎からの機械力学』[日新出版]

第0章：ガイダンス（振動とは）

【1】　シラバスの確認

【2】　改めて考えてみよう

(ア)工学とは？

(イ)機械工学とは？

(ウ)力学とは？

(エ)静力学・動力学とは？

(オ)機械力学とは？

(カ)運動とは？

(キ)振動とは？

★「〇〇学」とは.

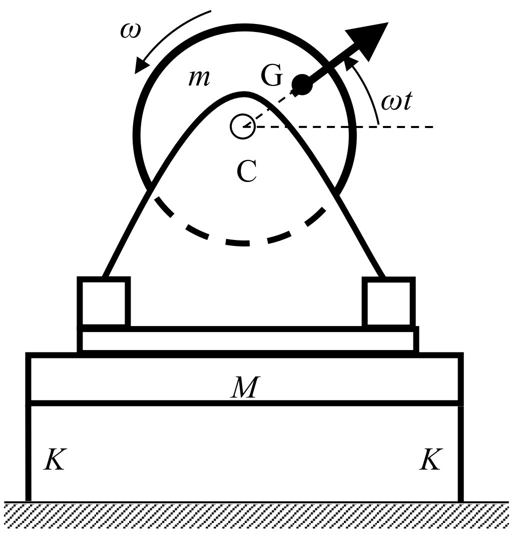
現象 → 数学モデル → 把握,予測,設計

機械力学 I：

機械力学 II：

★ 機械と機械力学

（例１）回転機械による振動（例えば，モーター）



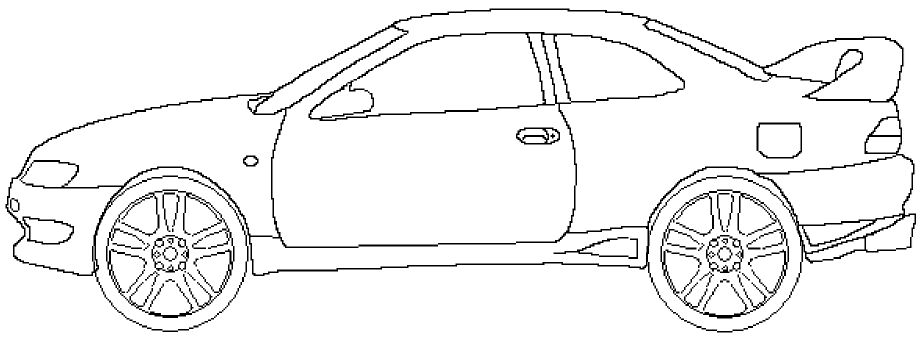
M：支持構造物の質量
m：モーターの回転質量
r：モーターの回転半径
k：床と機械の支持柱
ω：回転角速度
C：回転の中心
G：物体の重心

Q1．どんな問題が生じるか？

Q2．その理由は？

Q3．どうすれば問題を解決できるか？

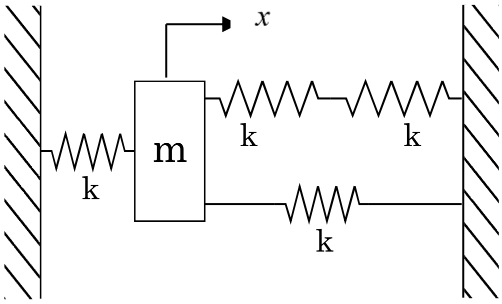
（例２）自動車の振動問題　　　　　振動≒騒音（音は　　　　　　　　）



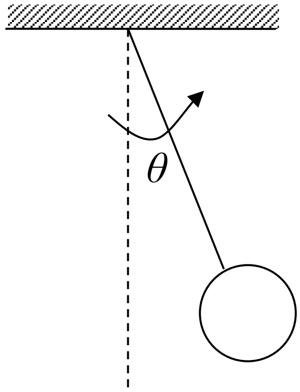
★機械力学Ⅰの GOAL

（A）運動方程式の作成

(1)並進運動の場合



(2)回転運動の場合



（B）運動方程式の解法

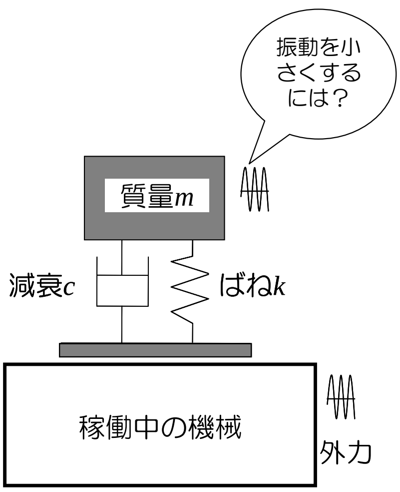
1） $5\ddot{x}+6x=0$ の自由振動解（一般解）
2） $5\ddot{x}+6x=0$，初期条件 $x(0)=1$，$\dot{x}(0)=0$ の下での自由振動解
3） $\ddot{x}+2\dot{x}+3x=0$ の自由振動解（一般解）
4） $\ddot{x}+2\dot{x}+3x=0$，初期条件 $x(0)=0\mathrm{m}$，$\dot{x}(0)=\sqrt{2}\mathrm{m/s}$ の下での自由振動解
5） $\ddot{x}+3\dot{x}+12x=5\sin 2t$ の強制振動解（特解）

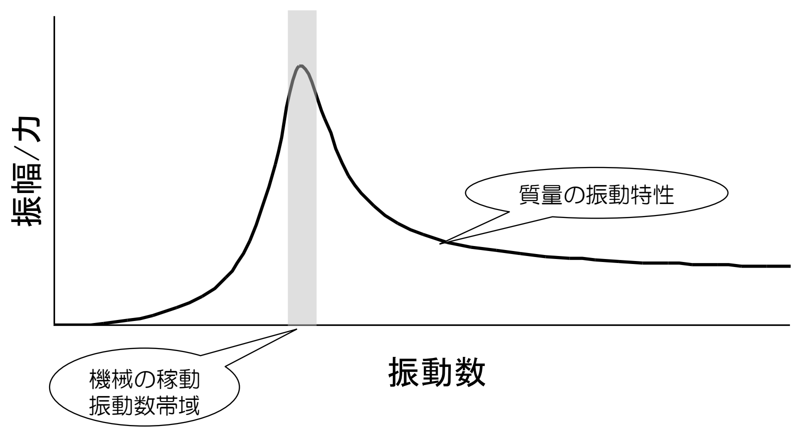
（C）自由振動と固有振動数を知る

（D）強制振動と周波数応答関数，共振を知る

（E）「エンジニアとして」重要な考えを知る

Question：質量 m の振動を小さくするための方策は？





★考えてみよう：信号の伝播
★複素数演算など

【小テスト問題 1】以下の問題に答えよ.

(1) $\left(2-i\right)\cdot\left(-1+i\right)$ を計算せよ.

(2) $\dfrac{2-i}{2i}$ を計算せよ.

(3) 2 次方程式 $2x^2+2x+3=0$ を解け.

(4) 2 次方程式 $x^2-2x-a=0$ の解が２実解となる a の範囲を求めよ.

(5) 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ を解け.

【小テスト問題 2】以下の問題に答えよ.

(1) 極座標の点$\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$を直交座標の点として表せ.

(2) 直交座標の点$\left(\sqrt{3}, 1\right)$を極座標の点として表せ.

(3) $z = 1 - i$ に対して，$z + \bar{z}$ を求めよ.

(4) 指数関数$2e^{j\frac{\pi}{4}}$を複素数で表せ.

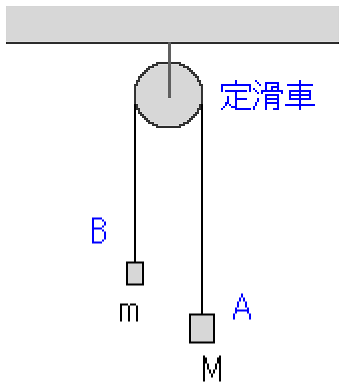
(5) 複素数 $1 + 2j$ を指数関数で表せ.

第１章：運動方程式の作成と解法

★運動方程式の作成

（例）右図のように，軽い滑車を通して，軽い糸で質量が M の物体Ａと質量が m の物体Ｂをつりさげ，静かに手をはなすと両物体が等加速度運動をした．このときの両物体の加速度の大きさ a と，糸の張力の大きさ T はいくらか．ただし，重力加速度の大きさを g とし，$M > m$ とする．

$Ans.\ a = \frac{M-m}{M+m}g, T = \frac{2Mm}{M+m}g$

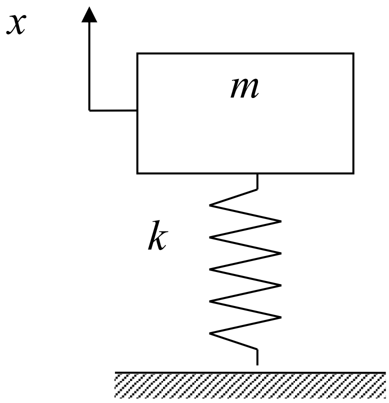


■ 自由体図による運動方程式の作成

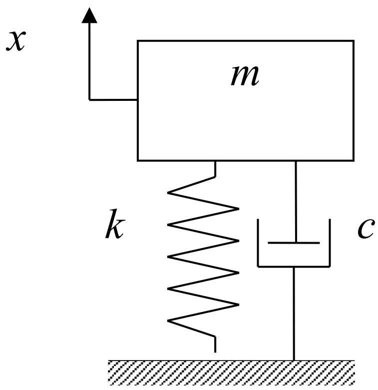
【使用書 1, ８・１・４】

	運動方程式の作成：自由体図による方法
①	運動をイメージ
②	ある瞬間を捉え，その位置を x として書き出す
③	「される力」を書き込む
④	ニュートンの第二法則に従い，$ma=F$ より運動方程式を立てる

(例 1)　　自由体図



(例 2)　　自由体図



重力の影響は？　【使用書 1, ８・５】

★ 運動方程式の解法

本講義の運動方程式は，定数係数２階線形常微分方程式で，以下の二種だけ.

(Type1)　$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$　：同次（斉次）方程式

(Type2)　$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f\sin\omega t$　：非同次（非斉次）方程式

（例１）　Type1 の例

① $5\ddot{x}+6x=0$ の一般解を求めよ.

② $5\ddot{x}+6x=0$ について，初期条件 $x(0)=1$，$\dot{x}(0)=0$ の下での解を求めよ.

$Ans.$ ① $x=B_1\cos\sqrt{\frac{6}{5}}\,t+B_2\sin\sqrt{\frac{6}{5}}\,t$　② $x=\cos\sqrt{\frac{6}{5}}\,t$

（例２）　Type2 の例

① $5\ddot{x}+6x=2\sin t$ の特解を求めよ.　$Ans.$ $x=2\sin t$

【解法】(Type1)　$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$　　　　　：同次（斉次）方程式

$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}, \ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ のことである.

解を　　　　　　　として代入すると,

この式が常に成り立つのは, $A=0$ か $s^2+as+b=0$ であるが, $A=0$ なら解は 0 となるため, 結局,

特性方程式の根を, α, β とすると, 根の種類によって解は以下となる.

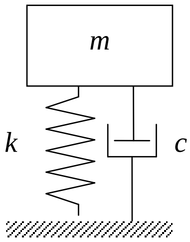
根の種類	一般解 x_c
相異なる２実根（$\alpha \neq \beta$）	
重根（$\alpha = \beta$）	
相異なる２虚根（$\lambda \pm ju$）	

【解法】（Type2）　$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f\sin\omega t$　：非同次（非斉次）方程式

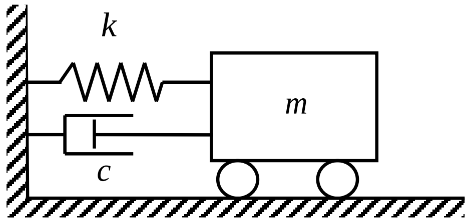
演習①　運動方程式の作成と解法

【１】以下の系の運動方程式を，自由体図を書いて作成せよ.

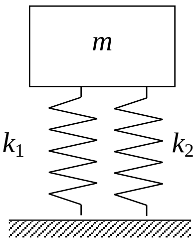
(1)



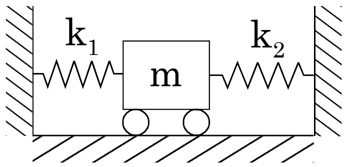
(2)



(3)

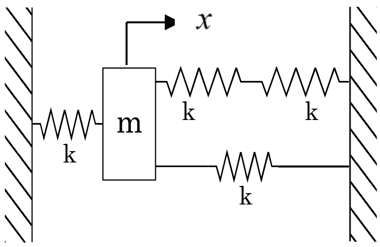


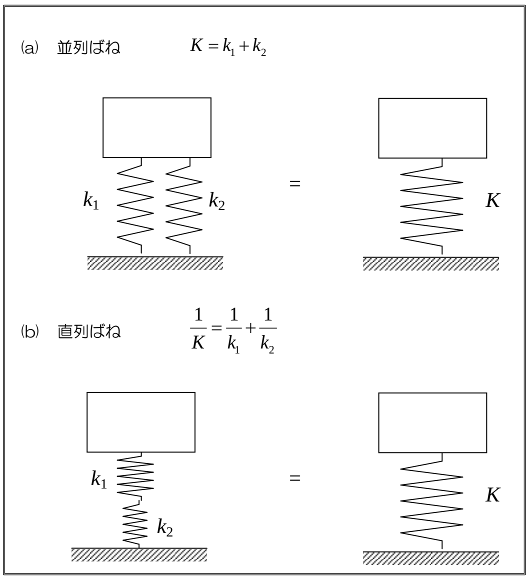
(4)



(5)

Hint：右の公式を利用する





$Ans.$ (1) $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$　　(2) $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$

(3) $m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x$　　(4) $m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x$

(5) $m\ddot{x} = -\dfrac{5}{2}kx$

【２】 以下の微分方程式の解を求めよ.

(1)　$\ddot{x} + 2x = 0$ の一般解（自由振動解）

(2)　$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$，初期条件 $x(0) = 0\mathrm{m}$，$\dot{x}(0) = \sqrt{2}\mathrm{m/s}$ の下での解（自由振動解）

(3)　$\ddot{x} + 3\dot{x} + 12x = 5\sin 2t$ の特解（強制振動解）

(4)　$\ddot{x} + 3\dot{x} + 12x = 5\cos 2t$ の特解（強制振動解）

$Ans.$ (1) $x = A_1 \cos\sqrt{2}\,t + A_2 \sin\sqrt{2}\,t$　　(2) $x = e^{-t}\sin\sqrt{2}\,t$

(3) $x = \dfrac{1}{2}\sin(2t + \theta)$　ただし，$\theta = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$　　(4) $x = \dfrac{1}{2}\cos(2t + \theta)$

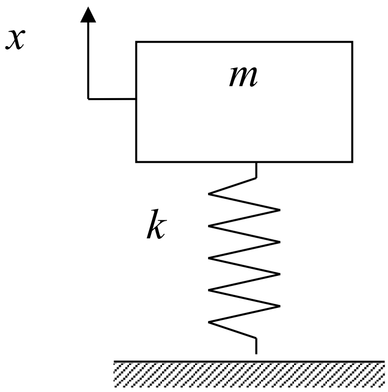
演習①ノート

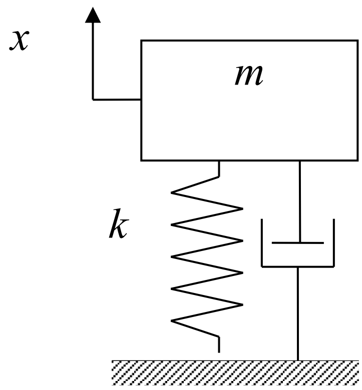
演習①ノート

第２章　不減衰一自由度系の自由振動

Keywords：調和振動,固有振動数,等価ばね定数

不減衰系　　　　　　　　　減衰系





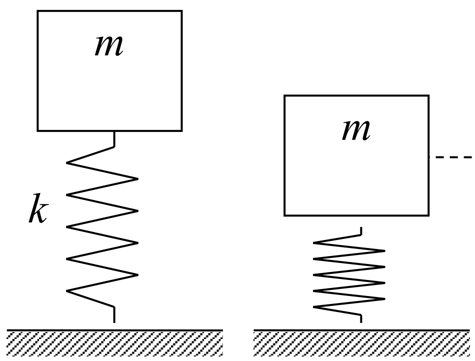
Q.　それぞれ質量を手で下に押して，手放すとどのような軌跡を描くか？

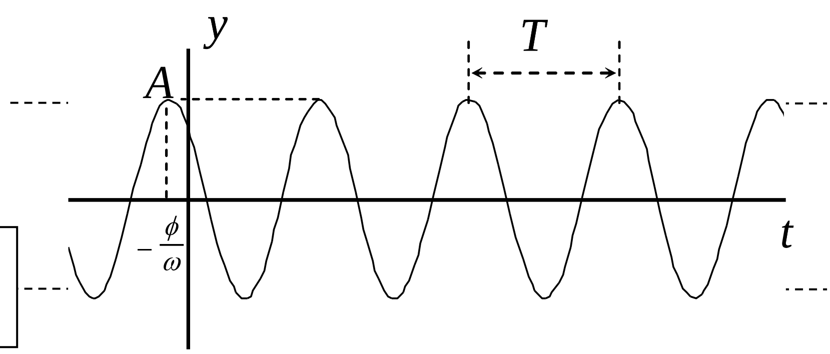
不減衰系　　　　　　　　　減衰系

➔　これを「語れる」ようにしよう！！　➔どうやって？　＝

【使用書 1，8･1･2】

（２ａ）調和振動





数式で表すと…

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad =$$

A：　　　　　　　　　　ω：

ϕ：　　　　　　　　　　T：

f：

【使用書 1，8·1·1】

（２ｂ）振動とは・・・

★ 振動　　JIS B0153:2001　　oscillation，vibration

（２ｃ）自由振動とは・・・

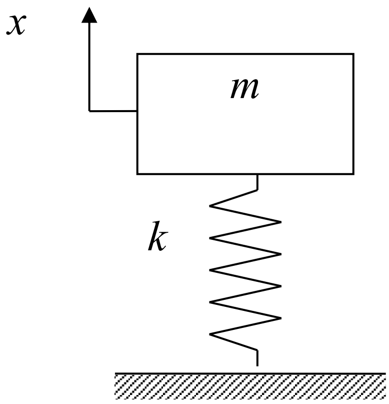
Ref）強制振動とは・・・

（２ｄ）自由度とは・・・

（2e）不減衰系の自由振動　➔　固有振動数！

【使用書 1，8·2·1】

(例 1)　　　　　　　　　　　　　　　自由体図



自由体図より，運動方程式は，　　(1)

調和振動を仮定すると，　　(2)　と書ける．式(1)に代入すると，

ここで，$A\neq0$，$e^{st}\neq0$ より，　　(3)

よって，　　(4)

なお，s（ラプラス変換子）$=j\omega$（フーリエ変換子）である．

したがって，式(1)の一般解は以下となる．

(5)

これを図示すると，

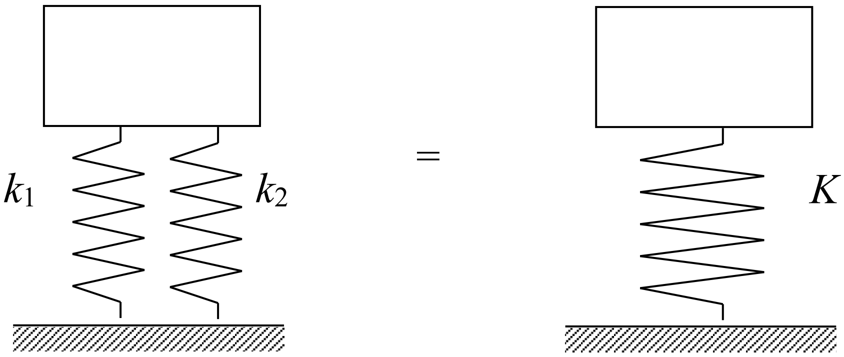
（不減衰）固有角振動数 ⑹

（不減衰）固有周期 ⑺

（不減衰）固有振動数 ⑻

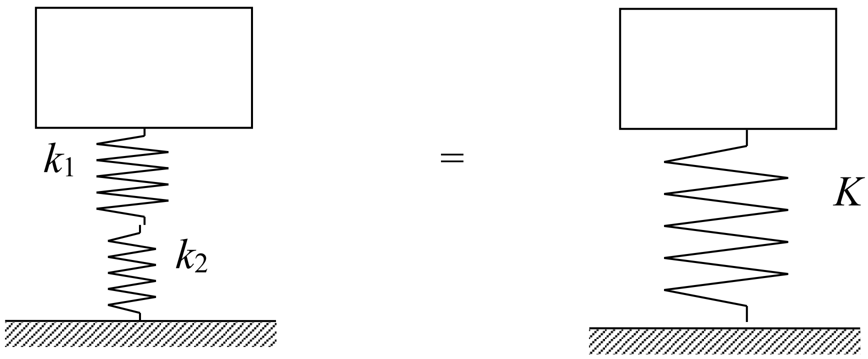
（２ｆ）等価ばね定数

(a)　並列ばね



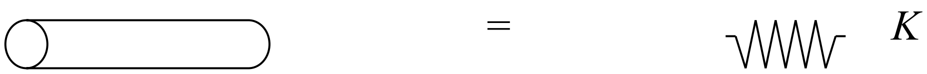
(9)

(b)　直列ばね



(10)

(c)　引張（圧縮）棒



A：断面積，E：ヤング率，ℓ：長さ:

(11)

Q.．なぜ，上記のようになるのか？

★Excel でグラフを作成してみよう

Q：コンピュータでグラフを描くには？

① アナログとデジタルって何？

② グラフって何？

③ コンピュータでグラフを描くって？

Q：以下の関数を Excel を用いて描け

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x^2 + 1$

③ $y = \mathrm{sin}x$

④ $y = \cos ax$　ただし、$a = 1, 2, 3$

演習②　不減衰一自由度系の自由振動

［1］『基礎からの機械力学』演習問題８【8･1】

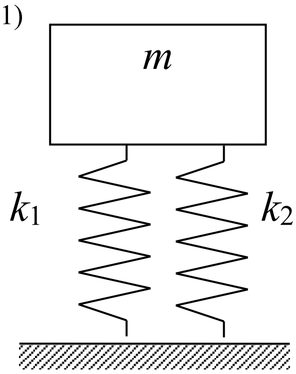
【8・1】 ばね に おもり をつるしたら，ばね が 10 mm 伸びて静止した．この物体の固有振動数を求めよ．

［2］『基礎からの機械力学』例題 8･3

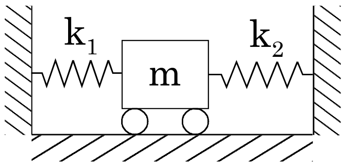
【例題 8・3】 質量 m が 3 kg，ばね定数 k が 300 N/m の一自由度系の固有角振動数，固有振動数および固有周期をそれぞれ求めよ．また，初期条件として，初期変位 $x(0)=0.1$ m，初期速度 $x(0)=10$ m/s のときの振動を表す式 $x(t)$ を求め，概形を図示せよ．

［3］ 以下の振動系の固有振動数を求めよ．

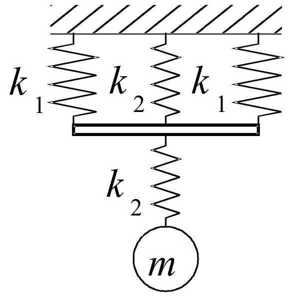
(1)



(2)



(3)



$$Ans.\quad (1)\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\quad (2)\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\quad (3)\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2k_1+k_2)k_2}{2m(k_1+k_2)}}$$

［4］『基礎からの機械力学』演習問題８【8･3】

【8・3】 以下のような質量，ばね，ダンパを有する一自由度系の自由振動解を求めよ．ただし，すべて，初期変位 $x(0)=0.1$ m，初期速度 $\dot{x}(0)=0.01$ m/s とする．

（1） $m=5$ kg，$k=100$ N/m

（2） $m=5$ kg，$k=100$ N/m，$c=10$ Ns/m

［5］『基礎からの機械力学』例題 8･5　　➔ 重力の影響

【例題 8・5】 ［重力の影響］ 天井から ばね定数 k の ばね を介して質量 m の物体を吊るす．ばね の自然長を考慮して運動方程式を立てよ．

［解答］ 図 8・13 (a) は ばね の自然長の状態である．そこに質量 m の物体を吊るすと，

$$mg-kx_{st}=0 \qquad \therefore\ x_{st}=mg/k \tag{E 8・12}$$

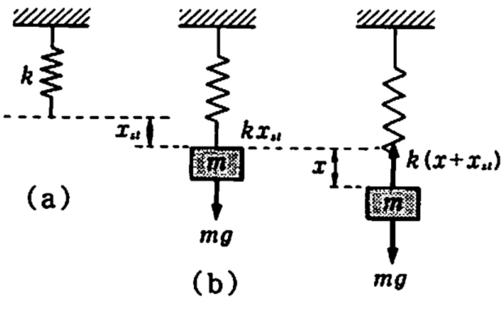


図 8・13

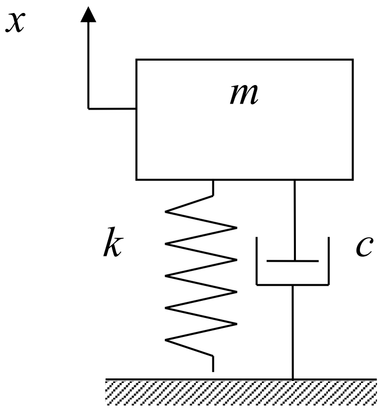
演習②ノート

第３章　減衰一自由度系の自由振動

Keywords　振動発生条件，減衰波形　【使用書 1，8·2·2】

（３ａ）運動方程式

自由体図



自由体図より運動方程式は，　(12)

ここで，　,　,　(13～15)

を用いて書き換えると，　(16)

調和振動を仮定して　を式(16)に代入し，整理すると，

ここで，$A \neq 0$，$e^{st} \neq 0$ より，　(17)

よって，　(18)

したがって，式(12)の一般解は，

(19)

となる．この一般解は，　によって更なる展開，すなわち，現象が異なる．

（３ｂ）振動の発生・不発生

(a) $\varsigma^2 - 1 > 0$，つまり　　　　　もしくは　　　　　　　　　　のとき

(20)

(b) $\varsigma^2 - 1 = 0$，つまり　　　　　もしくは　　　　　　　　　　のとき

(21)

(c) $\varsigma^2 - 1 < 0$，つまり もしくは のとき

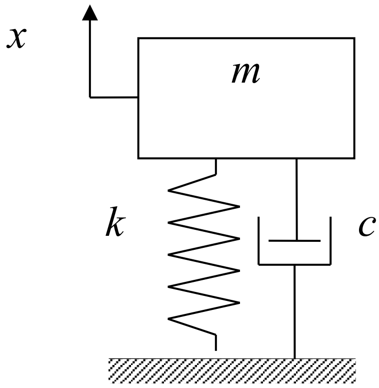
(22) とすると，

(23)

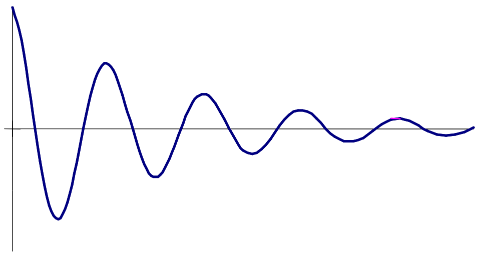
（３ｃ）減衰系の固有角振動数

（３ｄ）減衰波形

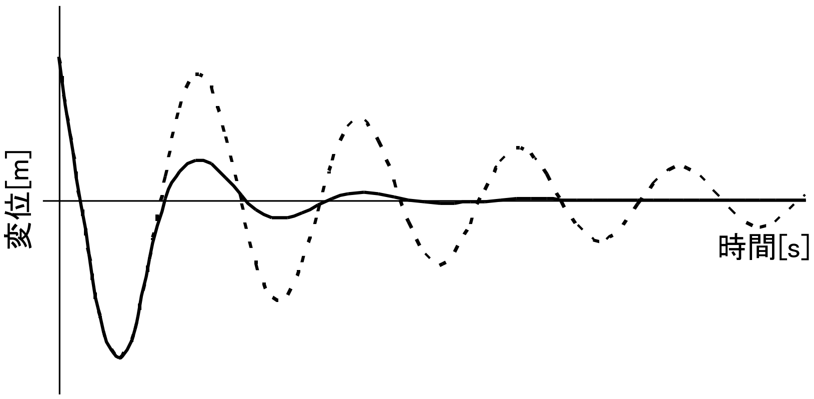
減衰系の場合，振動する条件は，　　　　　　　　　　　　　であった.



この時の波形（減衰波形）は以下のようになる.



Q. 同じ減衰波形でも以下の二種には違いがある. 君ならどのように，この二種の違いを表現するか？



減衰振動　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(23 再掲)

(24)

(25)

(26)

(27)

（３ｅ）対数減衰率

演習③　減衰一自由度系の自由振動

[1]『基礎からの機械力学』例題 8･6

【例題 8･6】 質量 m，ばね定数 $k=100\,\mathrm{N/m}$，粘性減衰係数 $c=10\,\mathrm{Ns/m}$ の一自由度系がある．$m=5\,\mathrm{kg}$ のときの不減衰固有振動数，減衰固有振動数，減衰比を求めよ．また，この系が振動しなくなる質量 m の条件を求めよ．

[2]以下の運動方程式で表される振動系において，振動するかしないかを述べ，振動する場合には減衰のない場合の固有角振動数を求めよ。

1） $\ddot{x}+4x=0$

2） $\ddot{x}+\dot{x}+2x=0$

3） $\ddot{x}+2\dot{x}+3x=0$

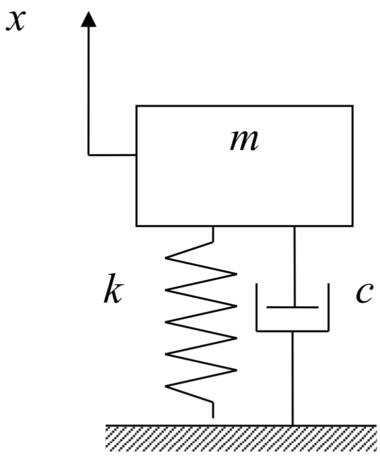
$Ans.$　(1)$\omega_n = 2$　(2)$\omega_n = \sqrt{2}$　(3)$\omega_n = \sqrt{3}$

[3]右図の振動系において，m=3kg，k=20N/cm であり．減衰振動波形の任意のとなりあうピーク比が 1：0.7 であった．以下を求めよ．

(1)　対数減衰率 δ

(2)　減衰比 ζ

(3)　減衰係数 c



$Ans.$ (1)$\delta = 0.357$　(2)$\zeta = 0.057$　(3)$c = 8.78\ \mathrm{kg/s}$

演習③ノート

第４章　一自由度系の強制振動（その１）

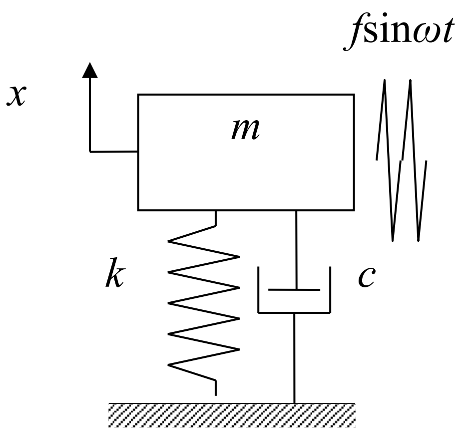
Keywords　周波数応答関数，共振，振動低減策

★　力による強制振動

（４ａ）強制振動とは・・・

Ref）自由振動とは・・・

（４ｂ）運動方程式の作成（力による強制振動）　　　　自由体図

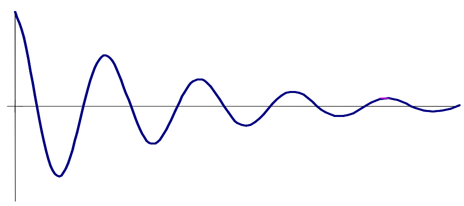


(28)

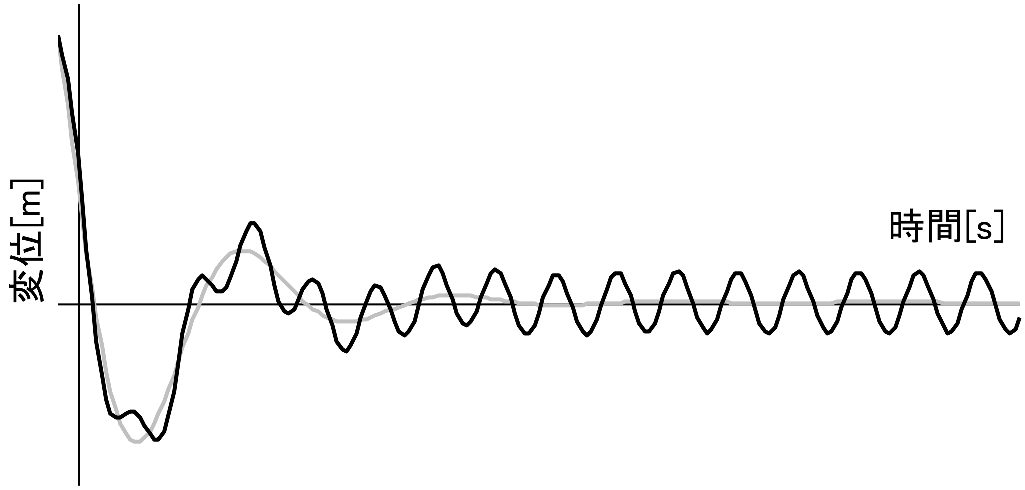
（４ｃ）運動方程式（Type2）の解法

強制振動を表す運動方程式の一般解　＝

● 同次解 x_c ➔ $$x_c = Ce^{-\varsigma\omega_n t}\cos(\omega_d t + D) \tag{29}$$



同次解で表される振動は，十分に時間が経つと消失するため，十分時間が経った後は，式(28)の強制振動は，特解 x_s だけで表される振動となる．



（４ｄ）特解 x_s ←

特解を　　　　　　　　　　　　として，式(28)に代入して整理すると，

ここで，　　　　　　　　と置き換えると，

(30)

よって，

(31)

さらに，静たわみ $x_{st}=f/k$，固有角振動数 $\omega_n=\sqrt{k/m}$，減衰比 $\varsigma=c/2\sqrt{mk}$ を用いて書き換えると，

(32)

したがって，特解 x_s は，

ここで，先に，　　　　　　　　だけに注目したので，式(28)の特解 x_s は以下となる．

(33)

ただし， (34)

(35)

（４ｅ）周波数応答関数（強制力による励振）

式(34)を基に，振幅比$|A/x_{st}|$と振動数比 $\omega/\omega_{\mathrm{n}}$ の関係を図示すると以下となる.

☆ 共振とは？

- $\omega/\omega_n \to 1$ となるとき， $|A/x_{st}|$ は最大（$\varsigma = 0$ のとき∞)， $\phi = -90^\circ$ となる.

  このときの状態を「 」と言い，この ω を「 」という.

- 最大振幅比は，減衰比 $\varsigma = c/2\sqrt{mk}$ が大きくなると減少する.

- $\omega/\omega_n \to \infty$ となるとき， $|A/x_{st}| \to 0$， $\phi \to -180^\circ$ となる.

☆ 位相とは？

$\omega/\omega_n < 1$（$-90^\circ < \phi < 0^\circ$）のとき ➔

$\omega/\omega_n > 1$（$-180^\circ < \phi < -90^\circ$）のとき ➔

演習④　一自由度系の強制振動

【１】以下の Type2 の強制振動を表す運動方程式の解を求めよ.

① $5\ddot{x}+6x=2\sin t$ の強制振動解（特解）を求めよ.

① $\ddot{x}+3\dot{x}+12x=5\sin 2t$ の特解を求めよ.

$Ans.$ $(1) x = 2\sin t$　$(2)\ x=\dfrac{1}{2}\sin(2t+\theta)$　ただし，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

【２】以下の微分方程式の解を求めよ.

1）　$\ddot{x}+12x=5\sin 2t$ の強制振動解

2）　$\ddot{x}+12x=5\cos 2t$ の強制振動解

3）　$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\sin t$ の強制振動解

4）　$\ddot{x}+2\dot{x}+12x=5\cos 2t$ の強制振動解

Ans.　1）$\frac{5}{8}\sin 2t$　　2）$\frac{5}{8}\cos 2t$

3）$\frac{\sqrt{5}}{5}\sin(t+\theta), \tan\theta=-2$　　4）$\frac{\sqrt{5}}{4}\cos(2t+\theta), \tan\theta=-1/2$

【３】『基礎からの機械力学』演習問題８【8·4】

【8·4】 質量 50 kg，ばね定数 5000 N/m，減衰係数 100 Ns/m の一自由度系に調和外力（振幅 500 N，振動数 20 Hz）が作用している．質量の変位振幅，位相をそれぞれ求めよ．

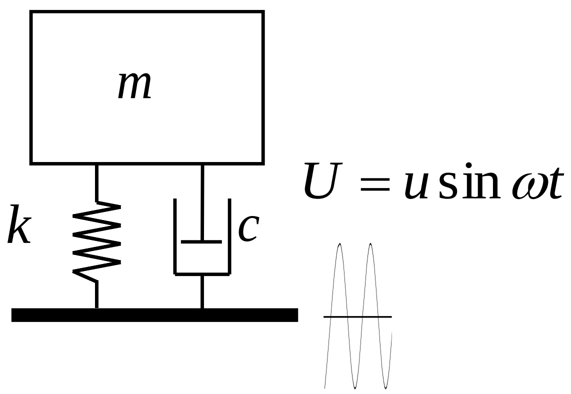
演習④ノート

第４章　一自由度系の強制振動（その２）

Keywords　周波数応答関数，共振，振動低減策

★　変位による強制振動

（５ａ）運動方程式と特解（強制振動解）



地震のような変位による強制振動を考える．

上図の振動系の運動方程式は，

(36)

このままでは計算が厄介であるため，

(37)

と置き換える．調和強制変位　$U = u\sin\omega t$　を代入して整理すると，

(38)

この式は，式(28)と同形　➔　特解 x_{rs} は式(33)，式(34)，式(35)より，

(39)

ただし，

(40)

(41)

（５ｂ）周波数応答関数（強制変位による励振）

式(40)から，振幅比$|A_{rs}/u|$，位相ϕと振動数比ω/ω_nの関係は以下となる.

これらの図より，

- $\omega/\omega_n << 1$のとき，$|A_{rs}/u| = 0$より$|x_{rs}/u| = 0$，$\phi = 0°$.

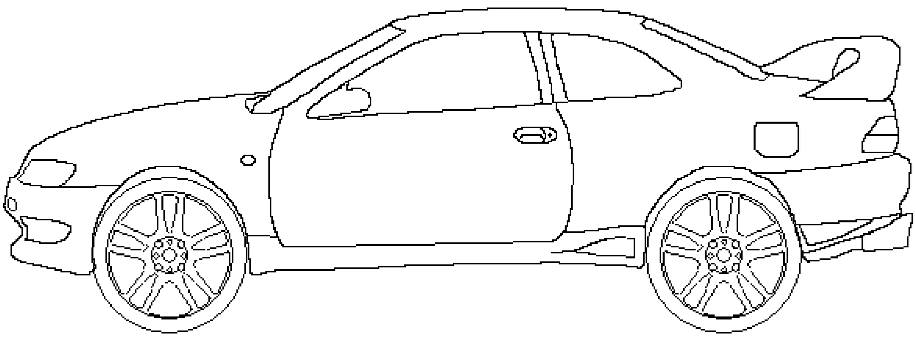
  ➔

- $\omega/\omega_n >> 1$のとき，$|A_{rs}/u| = 1$より$|x_{rs}/u| = 1$，$\phi = -180°$．すなわち，$x_{rs}/u = -1$．

  ➔

（５ｃ）振動の伝達と防振

自動車の振動騒音（NV）問題を例に.

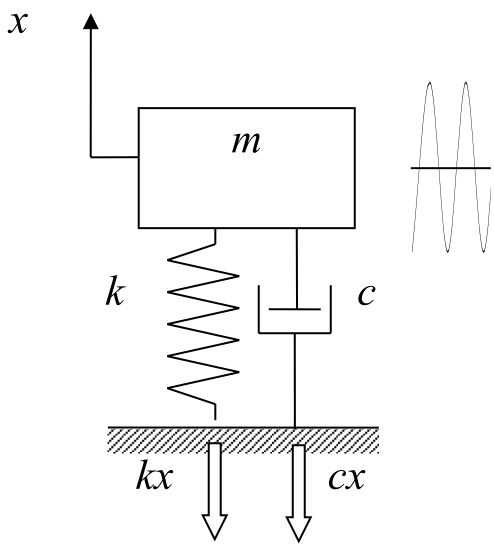


機械の運転➔　　　　　　　　　　　➔　　　　　　の伝達➔周辺構造物の振動➔騒音

☆　振動の伝達を抑制するには？

➔

➔



式(40)より,

$$x_s = x_{st} X \sin\left(\omega t + \phi\right) \tag{42}$$

ただし,

$$X = \frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right\}^2 + \left\{2\varsigma\, \omega/\omega_n\right\}^2}}$$

床が受ける力　$F_f =$

$$= x_{st} X \left\{k \sin\left(\omega t + \phi\right) + c\omega \cos\left(\omega t + \phi\right)\right\}$$

$$= x_{st} X \sqrt{k^2 + \left(c\omega\right)^2} \sin\left(\omega t + \phi + \gamma\right)$$

$$= fX\sqrt{1+\left\{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}\sin\left(\omega t+\phi+\gamma\right) \tag{43}$$

ここで，F_fの最大値をF_{fmax}とすると，

$$\frac{F_{f\max}}{f}=\frac{\sqrt{1+\left\{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}\right\}^2}} \tag{44}$$

この T_fを「　　　　　　　　　　　」という．

振動数比ω/ω_n と T_fの関係を図示すると以下の通り．

$\omega/\omega_n \approx 1$で共振

$\omega/\omega_n = \sqrt{2}$ で T_f=1

$\omega/\omega_n < \sqrt{2}$ で T_f>1

$\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ で T_f<1

★　図より，力の伝達を少なくするためには，ω/ω_n を大きくすればよい．

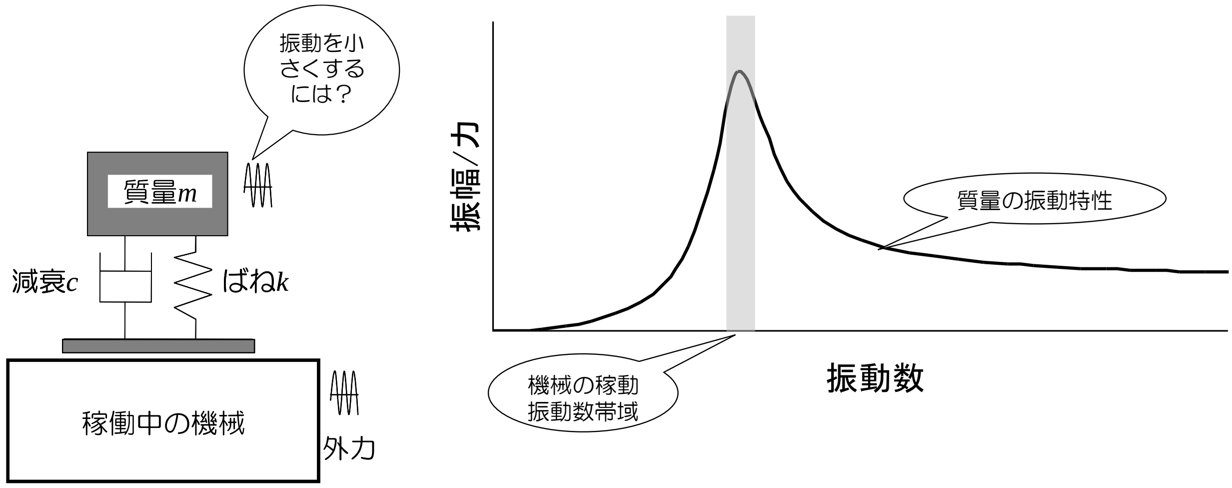
つまり，

★$\omega/\omega_n \approx 1$付近に注目すれば，力の伝達を小さくするためには，

　　　　　　　を大きくすればよい．➔このような支持を「　　　　　　　　　」という．

（５ｄ）振動低減策

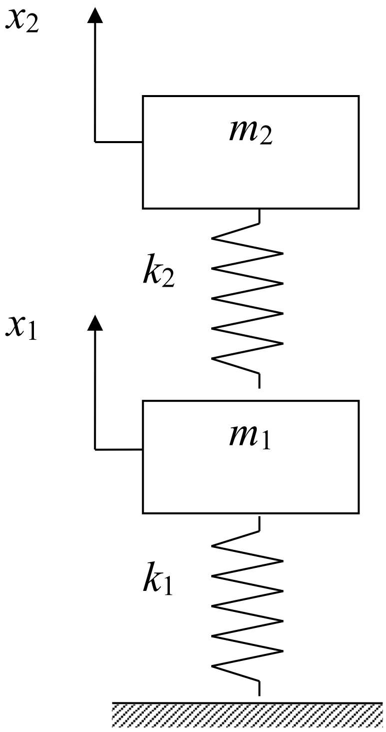
Question：質量 m の振動を小さくするための方策は？



第５章　二自由度系の運動方程式

Keywords　運動方程式

★　二自由度系の運動方程式



自由体図

◎運動方程式

(36)

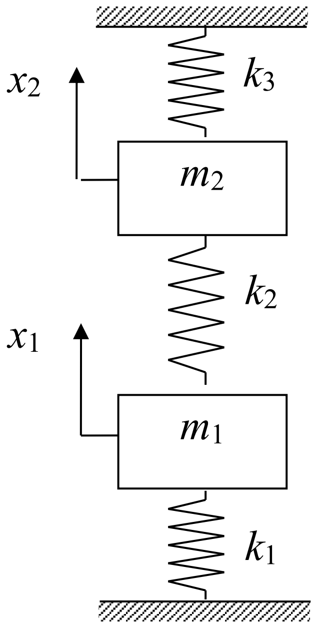
★固有振動数を知るには・・・

★周波数応答関数はどうなると想像する？

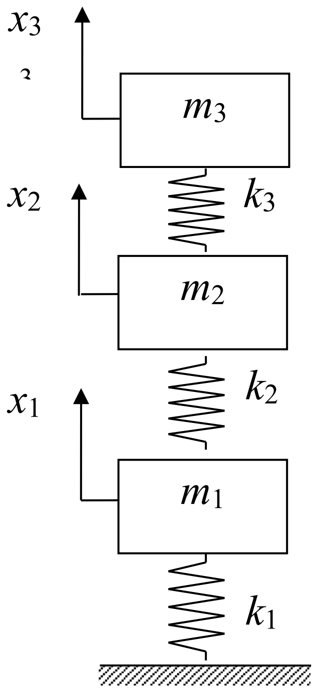
演習⑤　他自由度系の運動方程式

【１】自由体図を用いて，以下の振動系の運動方程式を作成せよ.

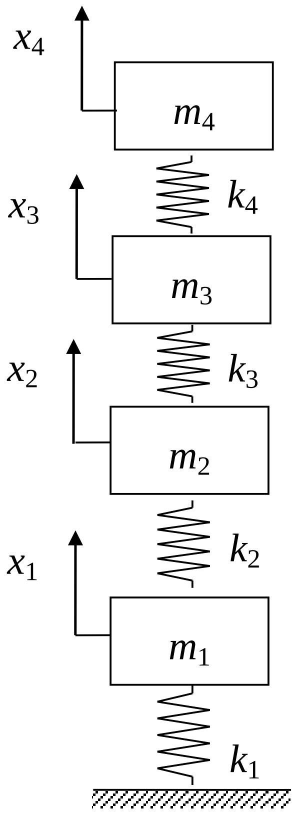
(1)



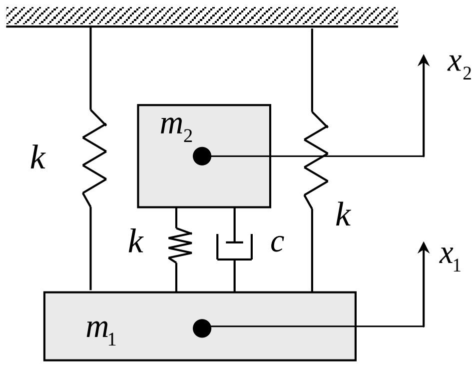
(2)



(3)



(4)



Ans.

(1) $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3(x_2 - x_3) \\ m_3\ddot{x}_3 = k_3(x_2 - x_3) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3(x_2 - x_3) \\ m_3\ddot{x}_3 = k_3(x_2 - x_3) - k_4(x_3 - x_4) \\ m_4\ddot{x}_4 = k_4(x_3 - x_4) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - kx_1 - k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$

演習⑤ノート

★発展：自由体図を使わないで運動方程式を作成する方法：

ラグランジュの方程式：$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0$$

T：運動エネルギー，U：ポテンシャルエネルギー，D：散逸エネルギー

ラグランジュの方程式

第６章　並進振動系と回転振動系

END